

TEMA 3 : ESTIMACIÓN POR INTERVALOS

X población $N(\mu, \sigma^2)$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ una muestra de X

Conocemos

$$\bar{X} \stackrel{d}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Supongamos que conocemos μ y σ , ~~tomamos~~ tomamos entonces una realización de $\bar{X}$

a partir de

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Ejemplo:

$\bar{X}$ = rendimiento mensual

$$\sigma = 2\% \quad n = 6$$

$$\{1.2, 3, 6, 7, 9\}$$

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+6+7+9}{6} = \frac{28}{6}$$

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$P\left(-1.96 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1.96\right)$$

$$= 0.99$$

$$\sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$-1.96 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1.96$$

$$-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} 1.96 \leq \bar{X} - \mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} 1.96$$

$$\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} 1.96 \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} 1.96$$

! Con probabilidad 0.99 !
 3.066 6.26

$$\frac{28}{6} - \frac{2}{\sqrt{6}} 1.96 \leq \mu \leq \frac{28}{6} + \frac{2}{\sqrt{6}} 1.96$$

$\bar{X}$ v.a. $\bar{X} = \bar{x} \left(\frac{28}{6} \right)$ es una
 observación de $\bar{X}$

Si X es continua

$$P(X = a) = 0!$$

$$P(X = \{a_1, \dots, a_n\}) = 0!$$

$P(3.066 \leq \mu \leq 6.26) = 0.99$

~~Ahora~~

Fijamos $0 < \alpha < 1$ más
bien $\alpha \simeq 0$, buscamos
en tablas si $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \stackrel{d}{\sim} N(0, 1)$

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

despejamos de la desigualdad

$$\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$$

Si $n \geq 30$

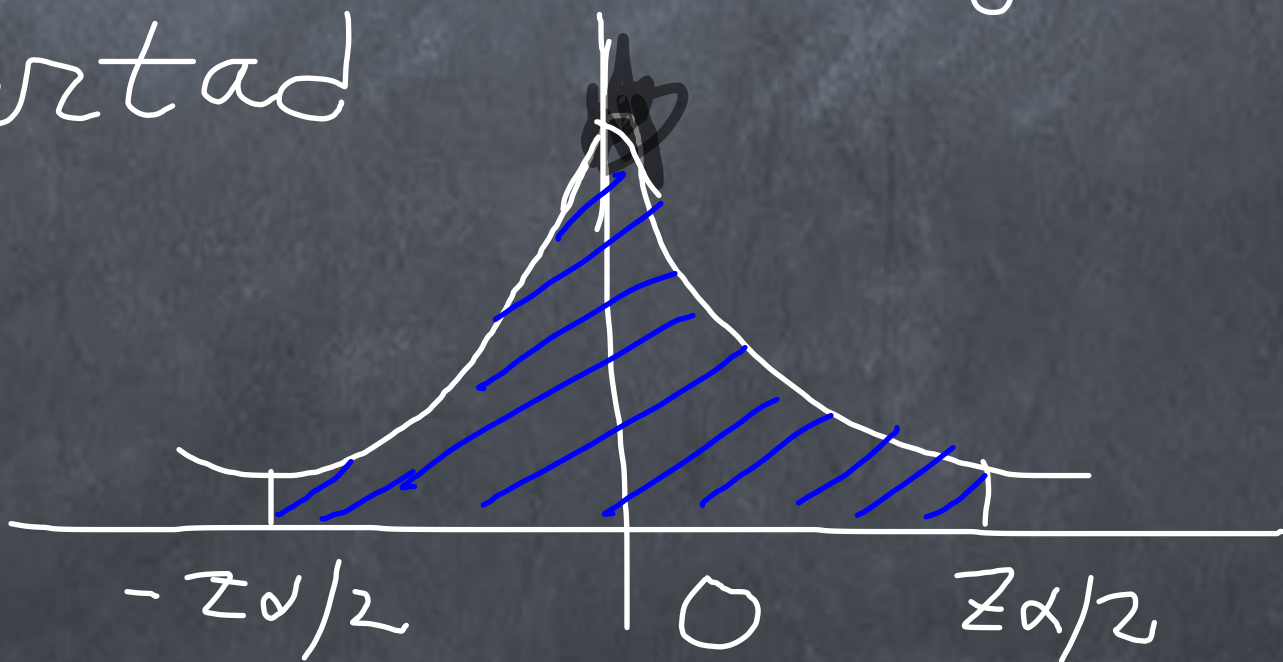
Podemos sustituir σ^2 por S_x^2 .

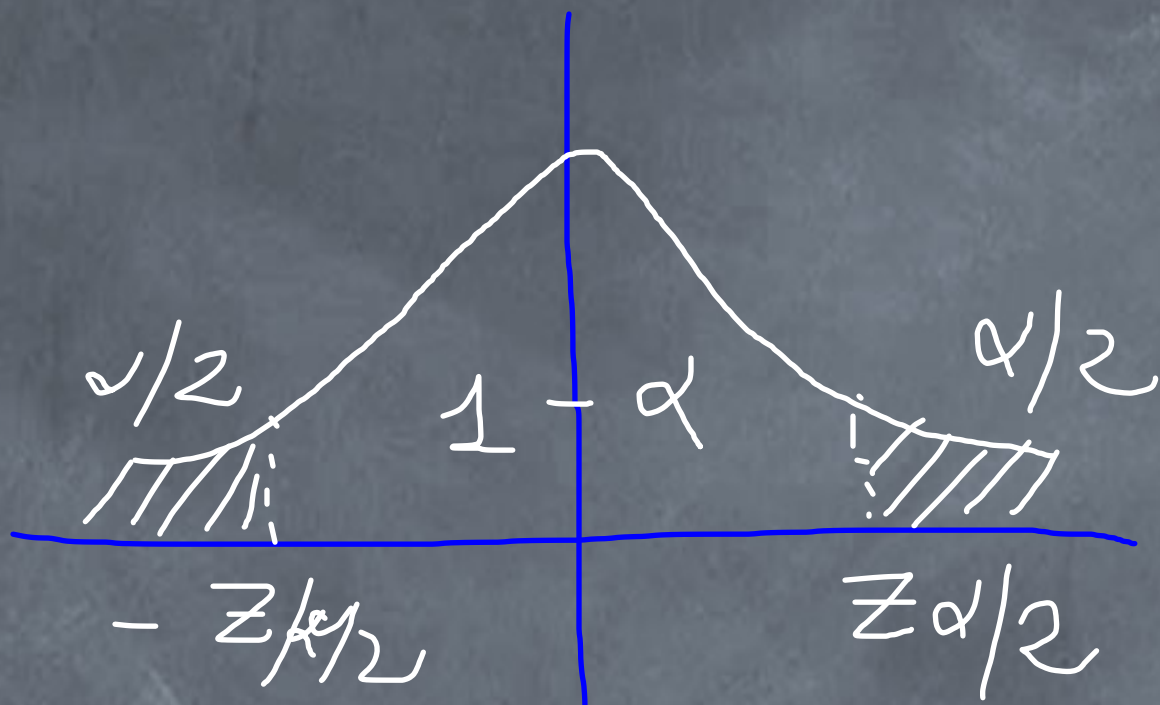
$$\bar{x} - \frac{S_x}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{S_x}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$$

¿Qué ocurre si $n < 30$?

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S_x}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

t de Student con $n-1$ grados de libertad





$Z_{\alpha/2}$ es una wla de la dist. normal con probabilidad $\alpha/2$
 $\text{colu} \equiv$ valor extremo de una distribución

¿Cómo sería la estimación para el ejemplo que se vio anteriormente?

$$t_5 \quad \bar{x} = \frac{28}{6} \quad n = 6 \quad S_x = 3.1411$$

$$t_{\alpha/2} = t_{6-1} \quad \alpha = 0.01$$

$$Z_{\alpha/2} = 3.5 \quad 1 - \alpha = 0.99$$

$$P(-z_{\alpha/2} \leq t_5 \leq z_{\alpha/2}) = 0.99$$

$$z_{\alpha/2} = 3.5$$

$$\frac{28}{6} - \frac{3.1411}{\sqrt{6}} 3.5 \leq \mu \leq \frac{28}{6} + \frac{3.1411}{\sqrt{6}} 3.5$$

con el 0.99 de probabilidad

$$0.178 \leq \mu \leq 9.15$$